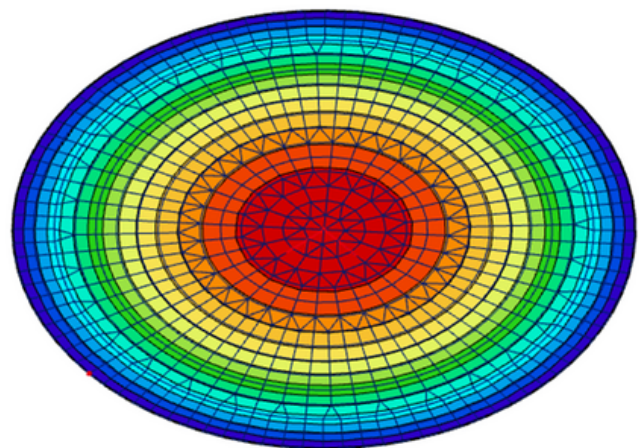
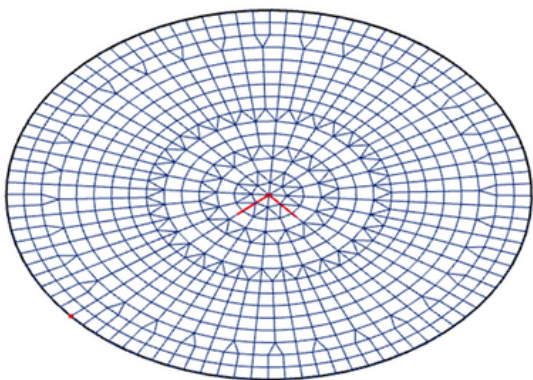
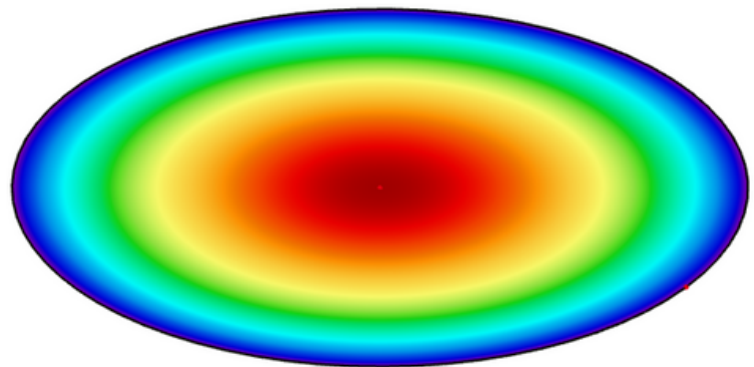
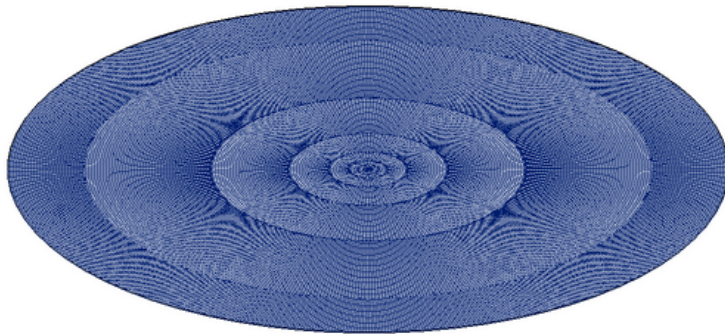


# ***POR QUE ME PREOCUPAR*** **com os nós da minha malha**

**de Elementos  
Finitos?**



## ***Faaala pessoal!!***

Meu nome é João Feltrin, e fiz esse e-book para os participantes do Grupo de Estudos Integrados: Tecnologia e Engenharia de Estruturas.

Finalmente algum post que não seja enquete, não?? Aposto que já estavam cansados de esperar.

Seguinte!!

Hoje vamos falar de um assunto bem básico de elementos finitos, embora englobe conteúdos bem avançados. À medida que formos criando conceitos mais sólidos, podemos voltar nesse tema e discutir com mais profundidade!

Belezinha?

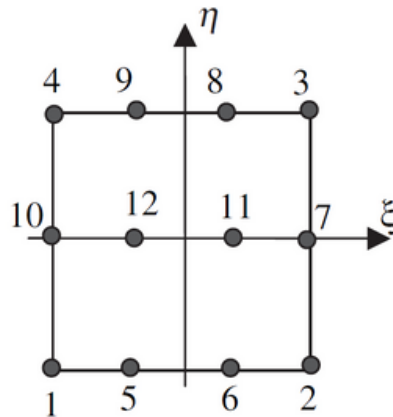
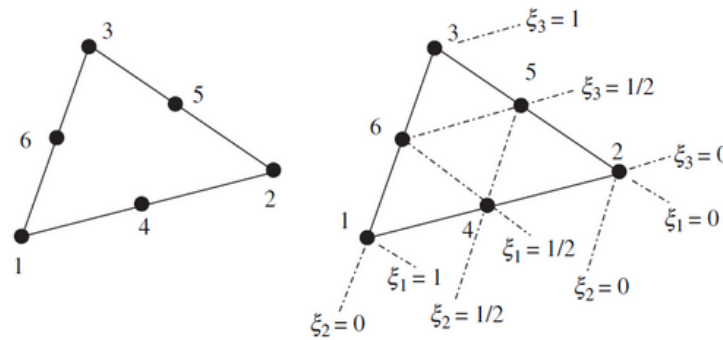
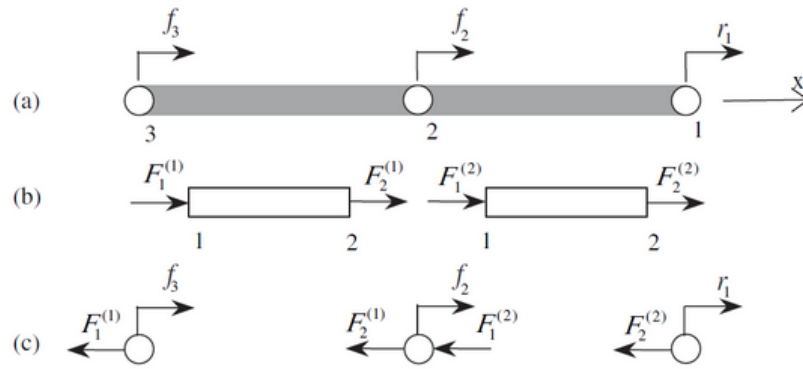
Como vocês pediram anteriormente, vou passar uma introdução bem básica de FEM para que quem não conhece muita coisa possa acompanhar nossas discussões dessa semana.

O método dos elementos finitos (finite element method) é um método de aproximação numérica, curiosamente, não tem nada a ver com estruturas! Você pode usar ele para dissipação de calor e até mesmo para reações químicas.

Ok, João, mas o que é?

Basicamente, o MEF consiste em pegar um elemento e dividir ele em vários outros elementos menores. Estes elementos menores possuem formas geométricas – podem ser retângulos, triângulos, octógonos, embora os mais comumente utilizados sejam os dois primeiros.

Para casos mais básicos, podemos até considerar que estes elementos sejam unidimensionais e os elementos finitos sejam segmentos do que seria uma barra!



Fish (2007)

Acontece que, independentemente do formato, estes elementos menores são formados por nós e são conectados entre si. E aqui chegamos em um ponto muito importante da nossa conversa: os nós.

**Mas, por quê?**

Porque as equações diferenciais que regem o comportamento mecânico dos materiais, no caso da engenharia de estruturas, são resolvidas com base nas coordenadas destes nós. Então, o que acontece é que você vai inserir a coordenada dos nós e, com base nisso, conseguimos resolver o sistema de equações.

Além disso, você vai precisar contar para o método quais são os carregamentos que este nó está absorvendo. Nesse caso, podemos considerar que, de certa forma, cada nó tem uma área de influência e ele absorve o carregamento de uma região maior que ele (o que é natural, uma vez que pontos no espaço possuem dimensões iguais à zero).

$$\int_{\Omega} \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} dx = (wA\bar{t})|_{\Gamma_t} + \int_{\Omega} wb dx \quad \forall w \in U_0.$$

Fish (2007)

**NEEEEM PRECISA SE PREOCUPAR!!**

***Não vamos tratar dessa equação aqui!! Talvez no futuro, em uma próxima leitura ;)***

***Mas, só para alimentar os curiosos, essa é a forma fraca da análise de tensões em um elemento 1D!!***

Muito bem, agora nosso método já tem as informações necessárias, podemos ser um pouco mais teóricos: podemos montar um conjunto de equações que vêm lá da Lei de Hooke.

Para isso, basta resolver as equações diferenciais da teoria da elasticidade e montar o que chamamos de matriz de rigidez dos nossos elementos.

$$F = k \cdot x$$

Dessa forma, vamos ter uma força aplicada no nó. Esta força é igual à rigidez daquele elemento multiplicada pelos deslocamentos sofridos. Nós sabemos as características de rigidez e sabemos as forças aplicadas, o que fica de incógnita são apenas os deslocamentos – sejam eles rotacionais ou de translação.

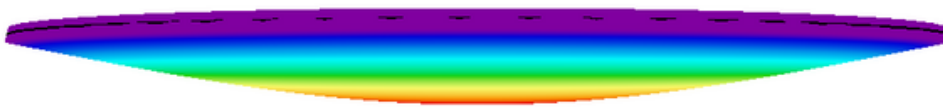
Encontrados os deslocamentos, basta voltarmos eles nas equações básicas da teoria da elasticidade, que conseguiremos achar os esforços internos solicitantes em qualquer um dos pontos que quisermos!

Muitos de nós vimos isso nas disciplinas de análise de estruturas, o chamado método dos deslocamentos!! SIM, o método dos deslocamentos é uma forma simplificada do método dos elementos finitos!

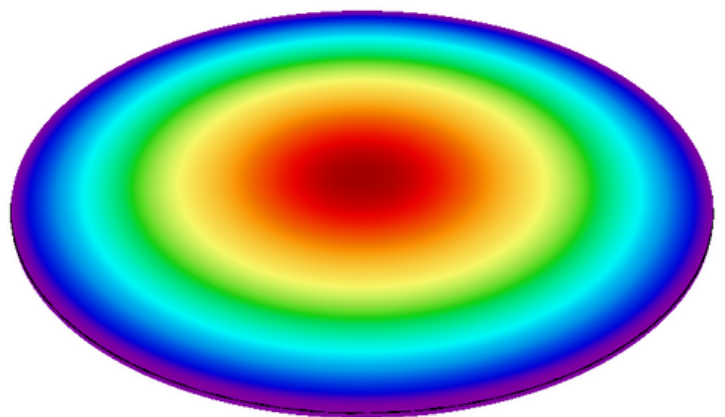
Muito bem!!! Agora que já estamos todos aquecidos, vamos para as nossas discussões.

Como vocês viram, os nós são muito importantes para que consigamos encontrar os esforços internos. Mas o quão importantes eles são?

Bom... já sabemos que os resultados são calculados nos nós. Mas, e o resto? Não tem resultados?



Deformação 3D em uma laje circular

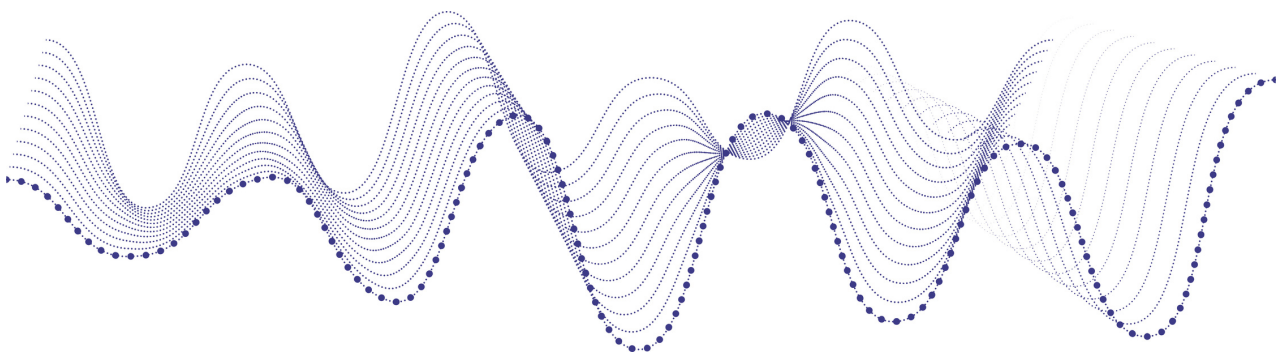


Claro que tem!!!

Acontece que, depois de termos os resultados nos nós, eles são interpolados para dentro da geometria do elemento finito! Eureka!!

Está aí a importância dos nós!

Vamos pensar da seguinte maneira. Se eu tenho uma curva de nível a cada 10 metros, podemos supor qual é o comportamento do terreno nesse meio por meio de interpolações, sejam elas lineares ou não. Entretanto, não sabemos exatamente o que acontece. Porém, se as curvas de nível fossem tiradas de 5 em 5 metros, nossa incerteza sobre o que acontece ali no meio passa a ser menor!

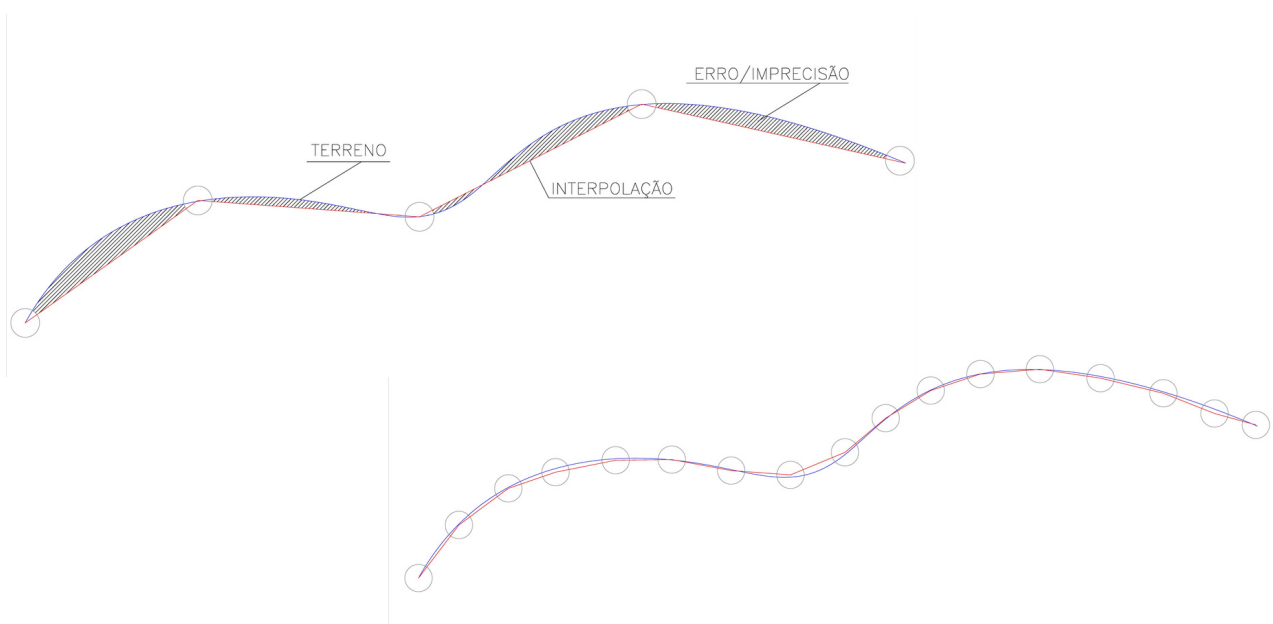




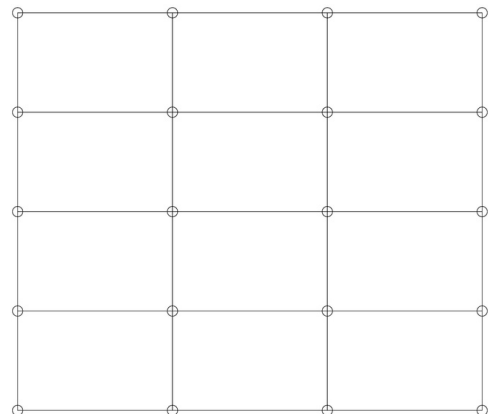
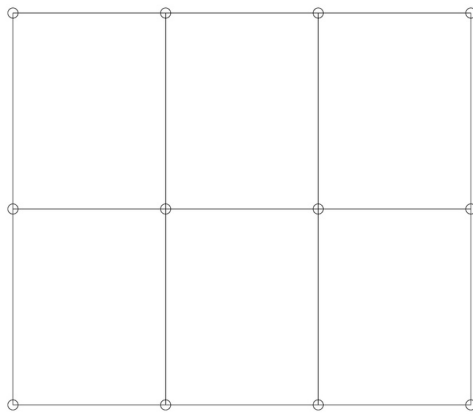
A mesma lógica vale para a quantidade de nós na malha de elementos finitos. Se tivermos 12 nós e 6 elementos, vamos ter que interpolar os resultados com base nos nós que temos disponíveis. Porém, se acrescentarmos mais 4 nós por linha, ficaremos com 20 nós e 12 elementos.

Então o “espaço” que temos para interpolar é menor, o que faz com que a nossa incerteza sobre o que acontece ali no meio seja menor.

Com certeza, existem erros intrínsecos à esta interpolação. Portanto, quanto maior a quantidade de nós – e, conseqüentemente, de elementos – tão menor será este erro!



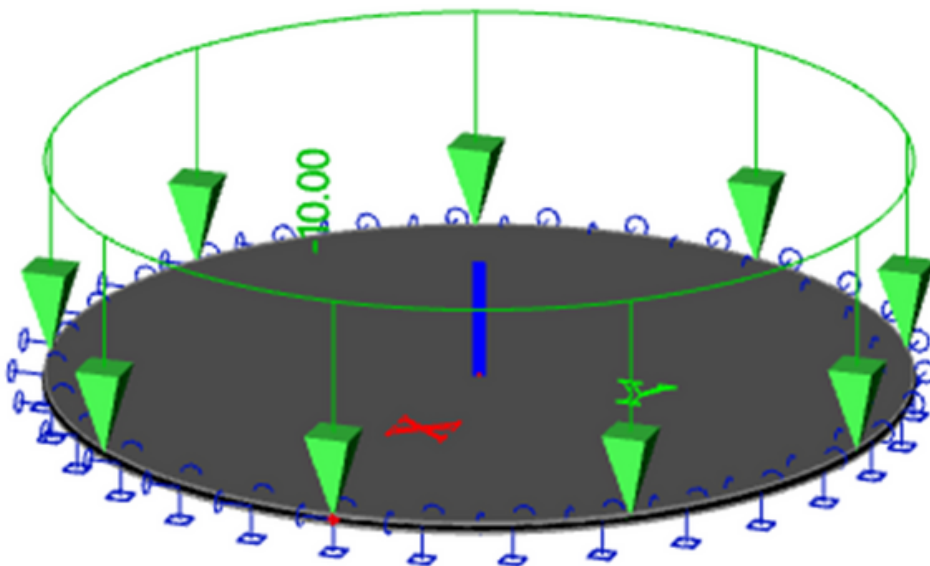
Por este motivo, é muito importante que o tamanho dos elementos na malha de elementos finitos esteja coerente com o que está acontecendo na minha estrutura!!  
Introduzindo mais um conceito técnico: a isso chamamos de discretização de malha!



Uma malha bem discretizada possui mais elementos, de tamanhos menores. Uma malha pouco discretizada, o contrário, poucos elementos com tamanhos maiores.

## ***Faaaalado isso...***

vou apresentar um exemplo muito bom do livro do Rombach. Vai ajudar bastante ilustrarmos o que discutimos. Imagine que exista uma laje circular de 15 metros de diâmetro submetida a um esforço de compressão de 10 kN/m<sup>2</sup>. Isso seria igual à 1000 kg/m<sup>2</sup>!



Pelas equações analíticas, o momento máximo no meio do vão é obtido pela seguinte equação:

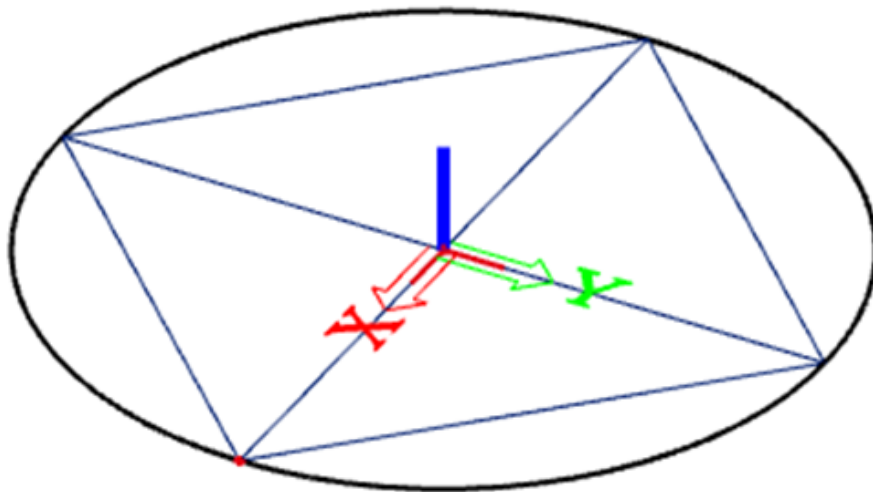
$$M = \frac{q \cdot r^2}{16} \times (3 + \nu)$$

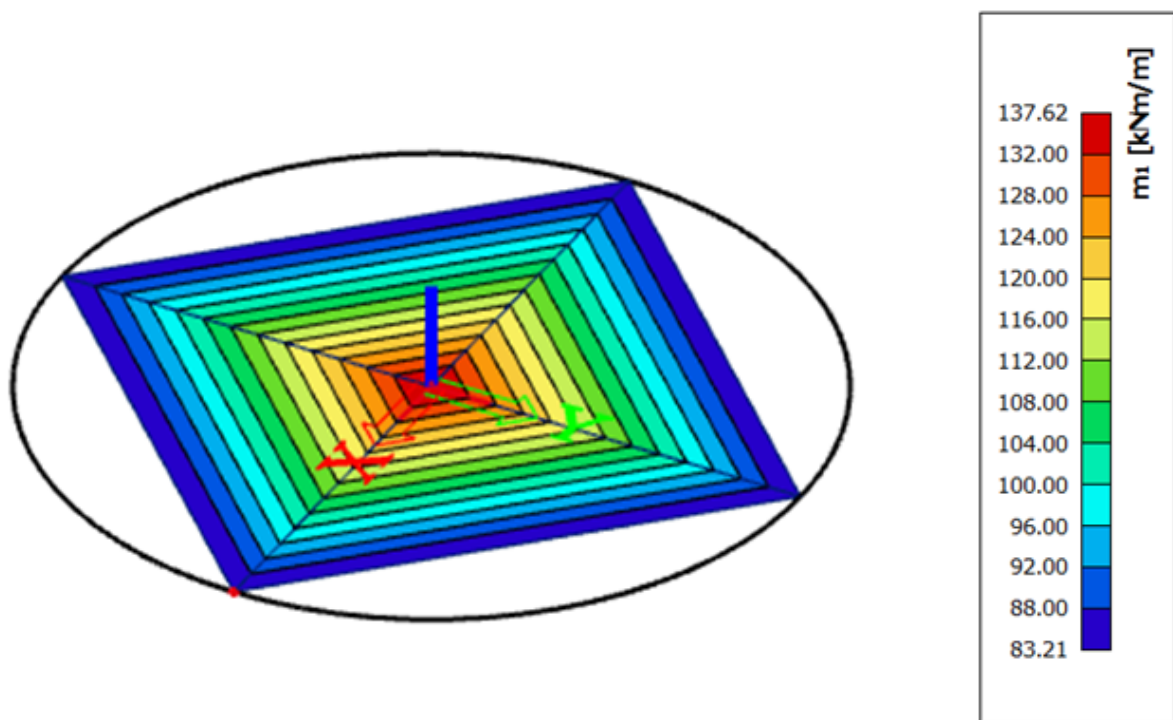
Onde,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson que, para o concreto é de 0,20.

Assim, com igual a carga de  $10 \text{ kN/m}^2$  e o raio igual à  $7,5$  metros, o momento máximo resulta em  **$112,5 \text{ kN.m}$**  no meio do vão. Vamos ver como isso fica no SCIA?

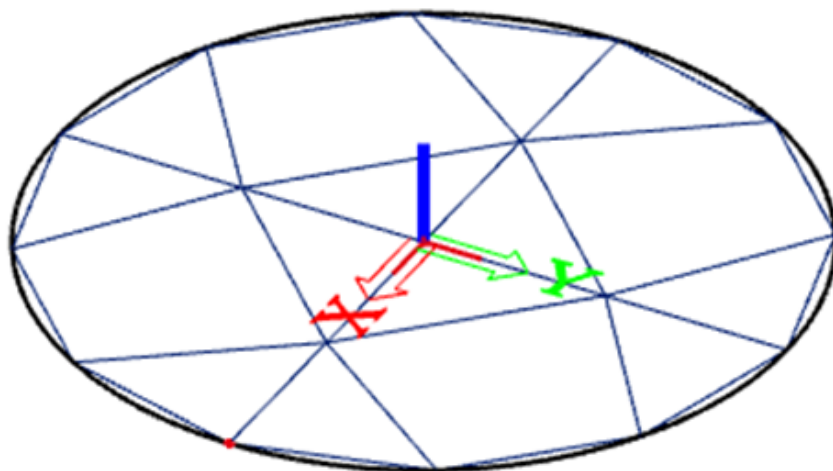
Primeiro, coloquei uma malha tão grosseira que só couberam 8 elementos! Será que os elementos estão muito grandes para essa malha? Vamos ver pelo resultado...

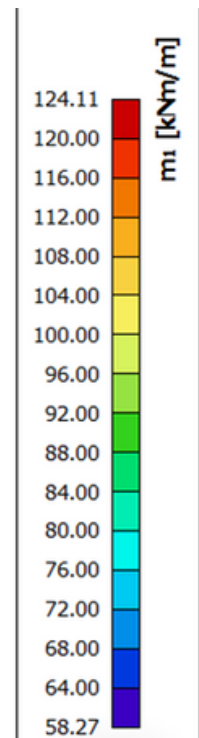
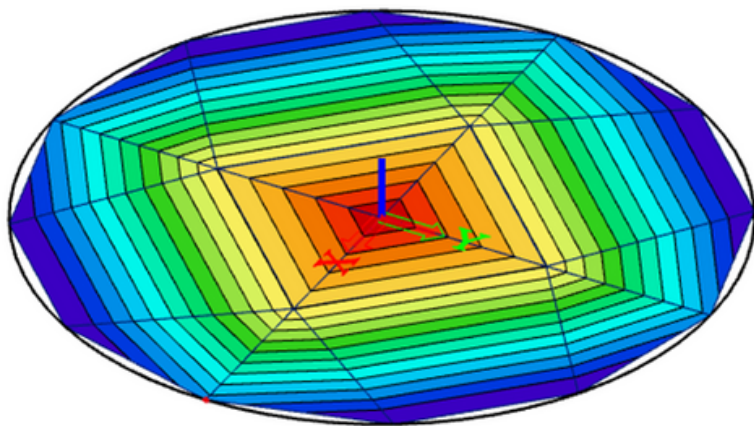
Os elementos, neste primeiro caso tem em torno de  $1000$  cm de comprimento.



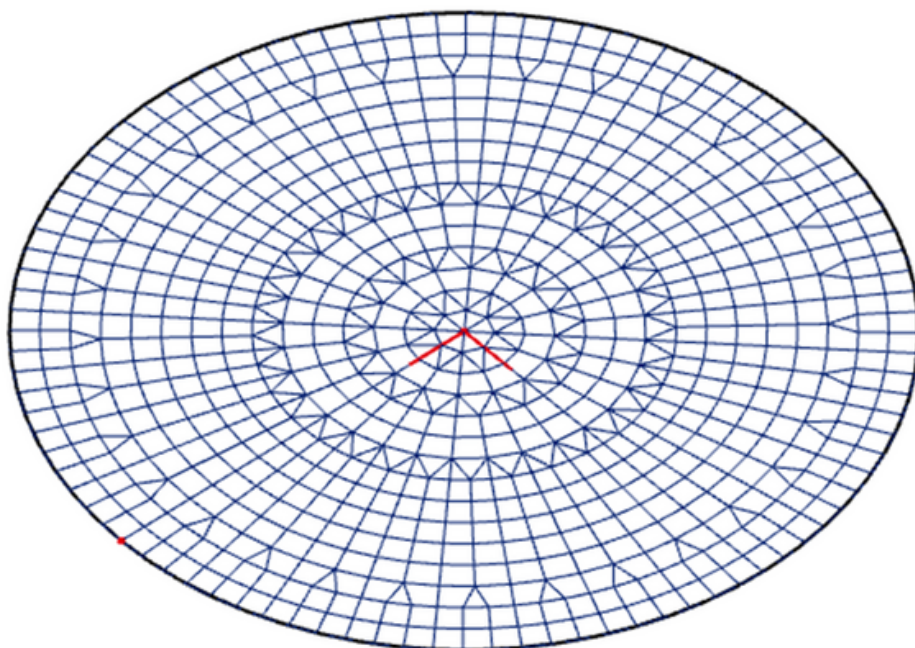


Olha só, que feio!! Não chegou nem perto. Vamos diminuir o tamanho dos elementos da malha para 500 centímetros e ver o que acontece.

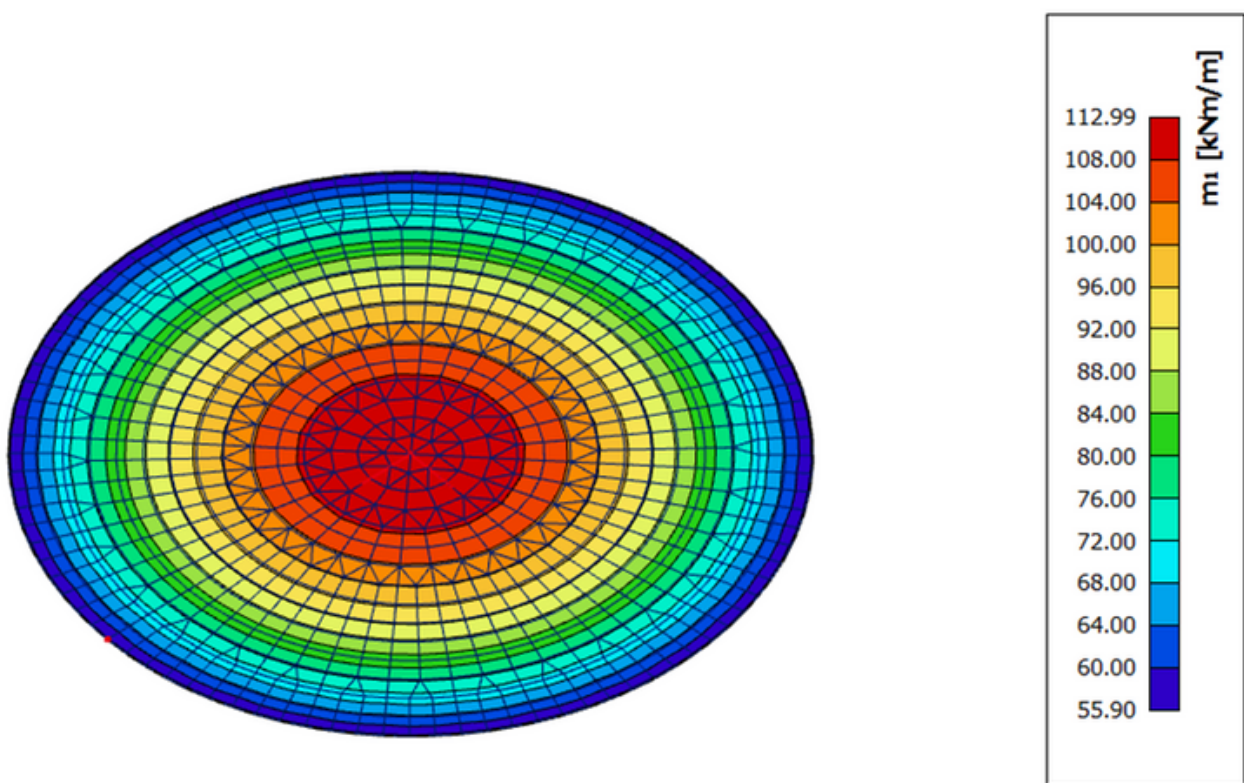




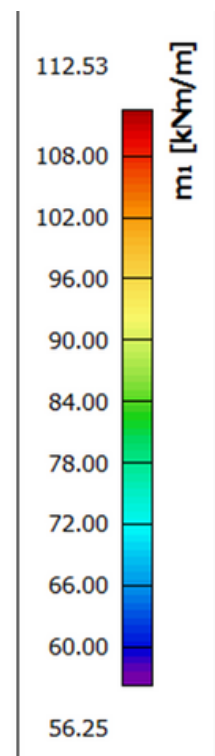
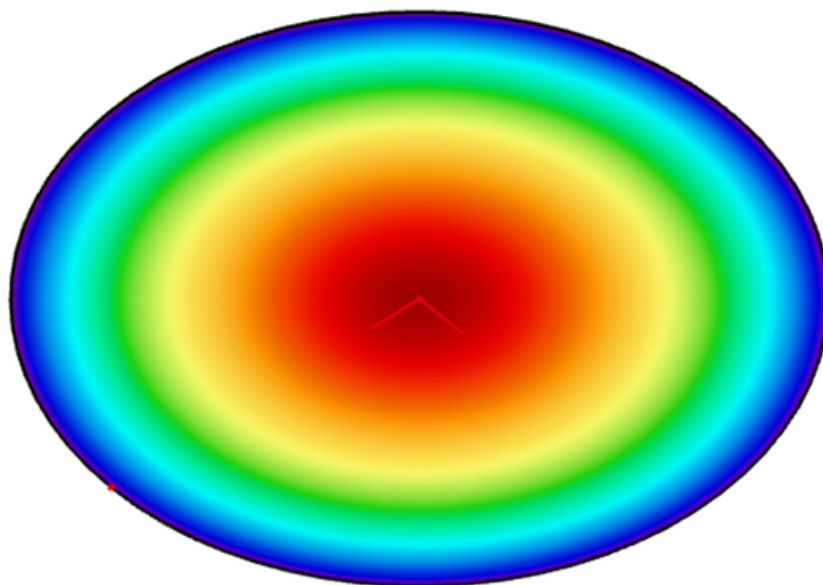
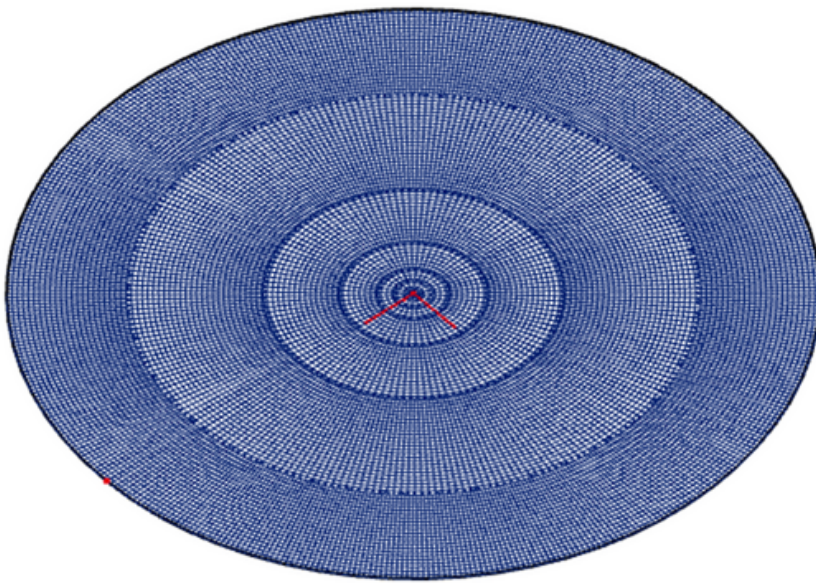
Tá... melhorou, mas ainda não gostei, ainda estamos em 110% do resultado. Vou diminuir bastante agora!! Vamos para 50 cm de comprimento.



Está começando a ficar bonito. Repare que existem elementos triangulares E retangulares na minha malha. Vamos ver os resultados.

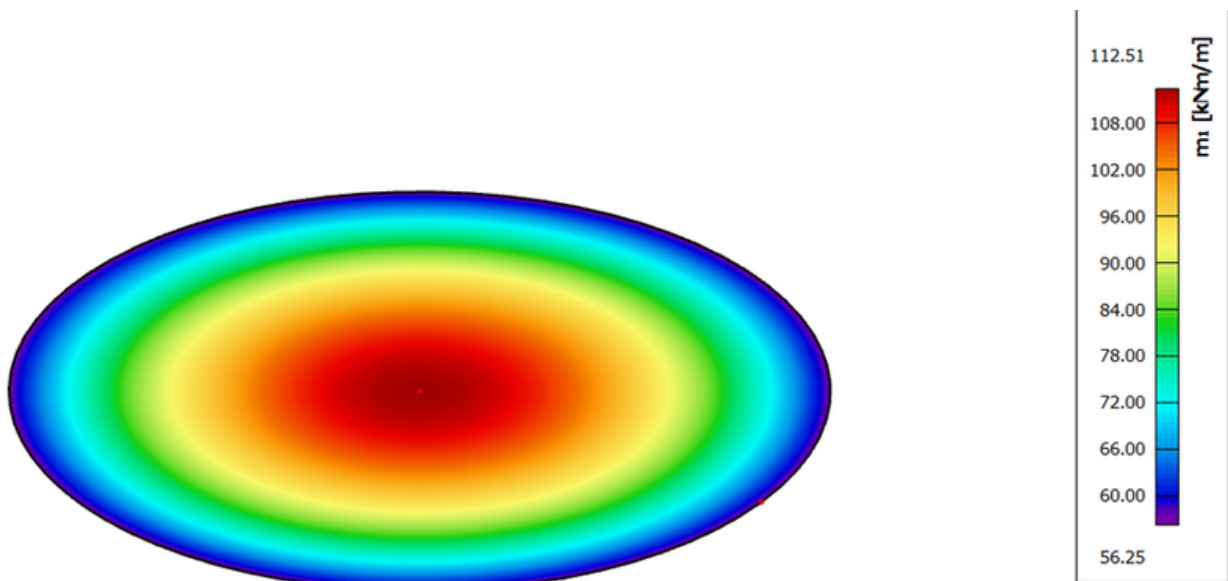


Opaaaa, quase lá!! Será que dá pra chegar mais perto?



Usando elementos de 10 cm de lado! Está uma malha bem bonita. Não? Agora eu gostei. E se eu refinar mais ainda? Vou colocar elementos de 6 cm de lado!





Agora sim, temos um resultado bem preciso!!

Você pode estar se perguntando, mas João... por que então, não podemos sempre colocar elementos extremamente pequenos para alcançarmos bons resultados? Você está completamente correto na sua pergunta!!

A resposta é simples! Quanto mais elementos colocamos, mais equações nosso computador precisa resolver. Chega uma hora que as equações serão tantas que pode demorar uma eternidade para que ele resolva tudo. Além disso, temos um ponto muito importante que podemos concluir analisando os resultados acima.

Diminuindo o tamanho dos elementos quase pela metade, de 10 cm para 6 cm, tivemos um variação de apenas míseros 0,02 kN/m. O que significa que existe um ponto em que a malha já está refinada o suficiente e os resultados não vão mudar significativamente, por mais que continuemos a aumentar a quantidade de elementos da malha. Como se nossa precisão fosse limitada a um certo valor.

Esse fenômeno é conhecido como convergência de malha. Significa que meu processo de aproximação numérica já está com um erro muito pequeno e eu não tenho por que discretizar mais a minha malha! Legal, não??? Agora... Finalmente, respondendo à pergunta do início:

**Você DEVE se preocupar com o refinamento da sua malha, principalmente em modelos 2D porque os resultados obtidos via MEF, dependem de uma interpolação feita entre os nós da malha! Como vimos, quanto mais nós, menor o erro intrínseco à interpolação. Lembre-se: uma malha não refinada pode te enganar nas suas análises!!!**

Boom galerinha!! Espero muito que vocês tenham gostado desse conteúdo, caso tenham alguma dúvida, é só chamar!!!  
Me sigam nas redes sociais!!

Um grande abraço e até mais!!

LinkedIn: <https://www.linkedin.com/in/joao-feltrin/>

Instagram: [@joaovictor\\_feltrin](https://www.instagram.com/joaovictor_feltrin)

WhatsApp: +55 19 99650 - 5031

**Apoio**



LinkedIn: <https://www.linkedin.com/company/bim-works/>

YouTube: <https://www.youtube.com/@BIMWORKSBrasil>

Instagram: [https://www.instagram.com/bimworks\\_brasil/](https://www.instagram.com/bimworks_brasil/)